

Olympiades de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 24 mars 2020

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les traces de leurs recherches et les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1

Confiserie

Dans une confiserie, on vend des caramels, des chocolats et des macarons.

Au cours de la matinée, 19 clients ont acheté au moins une de ces trois confiseries, mais aucun n'a acheté les trois en même temps.

En faisant ses comptes, la caissière s'aperçoit qu'elle a vendu des caramels à 17 personnes, des chocolats à 13 clients et des macarons à 8 clients.

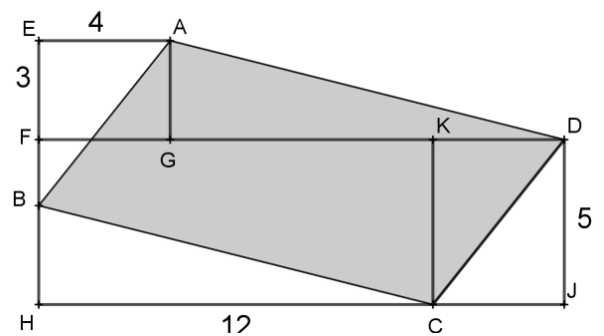
Combien de personnes ont acheté à la fois des macarons et des chocolats ?

Exercice 2

Des aires

Le quadrilatère FHCK est un rectangle de dimensions 12 et 5.
Le quadrilatère AEFG est un rectangle de dimensions 4 et 3.
Le quadrilatère KCJD est un rectangle (sa largeur n'est pas donnée).
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Déterminer l'aire de ce parallélogramme.



Exercice 3

Dodécachaîne

La suite de chiffres $1 - 3 - 2 - 4 - 0$ présente une propriété particulière : dans le système décimal, tous les nombres écrits en prenant dans l'ordre trois chiffres consécutifs de cette suite (132, 324, 240) sont des multiples de 12. On admet – exceptionnellement pour cet exercice – que l'écriture décimale d'un nombre puisse comporter un 0 en position la plus à gauche.

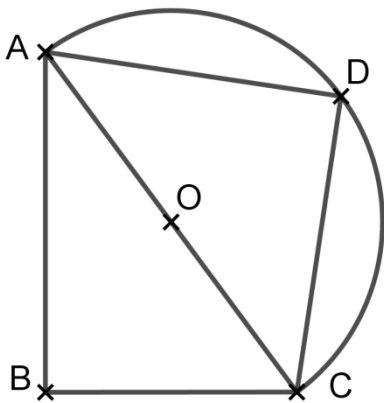
On rappelle qu'un entier est un multiple de 12 si et seulement si cet entier est un multiple de 3 et un multiple de 4.

Dans ce problème, on appelle *dodécachaîne* toute suite de chiffres possédant cette propriété.

- La suite $3 - 4 - 8 - 8 - 8$ constitue-t-elle une dodécachaîne ?
- Dans cette question, on cherche le chiffre a tel que la suite $2 - 1 - a$ soit une dodécachaîne.
 - Pourquoi ce chiffre a est-il pair ?
 - Pourquoi ce chiffre a est-il divisible par 3 ?
 - Déterminer ce chiffre a .
 - On donne à a la valeur obtenue précédemment. Déterminer le chiffre b tel que $2 - 1 - a - b$ soit une dodécachaîne.
- Existe-t-il un chiffre c tel que $3 - 5 - c$ soit une dodécachaîne ?
- Trouver une dodécachaîne comportant 5 chiffres dont le chiffre central soit 4.
- On donne la dodécachaîne $2 - 5 - 2 - 8 - 8$, qu'on complète progressivement en ajoutant des chiffres à droite. Quel est le 2 020^{ème} chiffre de la dodécachaîne ainsi construite ?

Exercice 4

Une course entre amis



Sur le plan ci-contre figurent des parcours de course empruntés par trois amis.

Le triangle ABC est rectangle en B, $AB = 200$ m et $BC = 150$ m.

Le point D est situé sur le demi-cercle de diamètre [AC]. Le triangle ACD est rectangle en D et isocèle.

- Victor parcourt le trajet A-B-C en vélo, à la vitesse moyenne de 15 km/h. Rachel va directement de A à C en roller, à la vitesse moyenne de 12 km/h. Ils partent en même temps du point A. Qui de Rachel ou de Victor arrivera le premier ?

2. Carl est un athlète entraîné. Les trois amis repartent du point A, Carl court en suivant le demi-cercle. Quelle doit être la vitesse moyenne minimale de Carl pour qu'il parvienne en C avant Victor et Rachel ?

- Victor parcourt le segment [AD] à la vitesse de 15 km/h et Carl l'arc $\widehat{AD}$ à la vitesse de 17 km/h. Ils partent en même temps du point A. Qui arrive le premier ?