Olympiades inter-académiques de mathématiques

Exercice 1 : L'esprit de la lettre

Lorsque l'on modifie l'ordre des lettres dans un mot, on arrive quand même à déchiffrer le mot du moment que la première et la dernière lettre du mot restent à la bonne place.

Par exemple, on arrive à déchiffrer la phrase :
Sleon une édtue de l'Uvinertisé de Cmabrigde, l'odrre des ltteers dans un mot n'a pas d'ipmrotncae, la suele coshe ipmrotnate est que la pmeirère et la drenèire soeint à la bnnoe pclae.

Dans cet exercice, on s'intéresse à un mot. On peut changer de place les lettres du mot, mais **la première lettre et la dernière lettre restent à la bonne place.**
Par exemple, on s'intéresse au mot LIRE. On obtient alors deux écritures possibles : LIRE et LRIE.

1. a. On s'intéresse au mot ETUDE. Qu'obtient-on comme écritures possibles ?
b. On s'intéresse au mot HUMAIN. Combien d'écritures possibles obtient-on ?
c. Combien existe-t-il d'écritures possibles de la phrase suivante, composée de trois mots : LES CHATONS JOUENT ?

2. On s'intéresse ici à un mot qui s'écrit avec n lettres (n étant un nombre entier positif) et ne contenant pas de lettres qui se répètent. Exprimer, en fonction de n, le nombre d'écritures possibles de ce mot.

3. On s'intéresse ici à un mot qui s'écrit avec n lettres (n étant un nombre entier positif) contenant deux fois la même lettre entre la deuxième et l'avant-dernière lettre**, une seule lettre étant doublée**. Exprimer, en fonction de n, le nombre d'écritures possibles de ce mot.

Correction :
1) a) Pour le mot ETUDE, la première lettre E et la dernière lettre E doivent rester à la même place donc seul T U et D peuvent changer de place. On écrit toutes les possibilités.

Quand le T reste à sa 2ème position	E T U D E	E T D U E
Quand le T passe à la 3ème position	E U T D E	E D T U E
Quand le T passe à la 4ème position	E U D T E	E D U T E

On remarque qu'il y a 3 positions possibles pour la lettre T et que pour chaque position il y a deux possibilités.
On total, il y a donc 6 écritures possibles du mot E T U D E.

b) Pour le mot HUMAIN, la première lettre H et la dernière lettre N doivent rester à la même place donc seul U, M, A et I peuvent changer de place. On écrit toutes les possibilités.

Quand le U reste à sa 2ème position	H U M A I N / H U M I A N / H U A M I N / H U I M A N / H U A I M N /H U I A M N
Quand le U passe à la 3ème position	H M U A I N / H M U I A N / H A U M I N / H A U I M N / H I U M A N / H I U A M N
Quand le U passe à la 4ème position	H M A U I N / H M I U A N / H A M U I N / H A I U M N / H I A U M N / H I M U A N
Quand le U passe à la 5ème position	H M A I U N / H M I A U N / H A M I U N / H A I M U N / H I A M U N / H I M A U N

On remarque qu'il y a 4 positions possibles pour la lettre U et que pour chaque position il y a 6 possibilités.
Au total, il y a donc 6 x 4 = 24 possibilités

c) Il faut trouver une méthode permettant de compter le nombre de possibilités pour un mot donné, sinon ça va être trop long de tout énumérer.
Pour LES Une seule possibilité.
Pour C H A T O N S, il y a 5 lettres qui peuvent être déplacées.
Pour le H, il y a 5 possibilités. C _ _ _ _ _ S
Une fois choisi la place de la lettre H, on place la lettre A il reste 4 possibilités. C H _ _ _ _ S
Une fois choisi la place de la lettre A, on place la lettre T, il y a 3 possibilités. C H A _ _ _ S

Une fois choisi la place de la lettre T, on place la lettre O, il y a 2 possibilités C H A T _ _ S puis il reste qu'une place pour la lettre N.
Au total il y aura donc 5 x 4 x 3 x 2 = 120 possibilités d'écrire le mot C H A T O N S

Pour J O U E N T, il y a 4 lettres qui se déplacent (comme pour HUMAIN) , il y a 4 x 3 x 2 = 24 possibilités.

Pour chaque possibilité du mot CHATONS, il y a 24 possibilités différentes pour le mot JOUENT donc au total il y a 120 x 24 = 2 880 phrases possibles.
Heureusement qu'on ne devait pas tout énumérer : 2 880 phrases c'est long !

2) Pour un mot de n lettres il y a n-2 lettres qui peuvent être déplacées.
Au total il y aura $(n-2)(n-3)(n-4)\ \times . . . \times 3 \times 2$ possibilités.

3) Comme il y a deux lettres identiques cela fait deux fois moins de possibilités soit $(n-2)(n-3)(n-4)\ \times . . . \times 3$ possibilités.

Exercice 2 : Lecture inversée

Pour tout nombre entier naturel N de quatre chiffres (le chiffre des milliers est donc non nul), on considère le nombre entier naturel N' obtenu en inversant l'ordre des chiffres de N.
Par exemple, si N = 3879, alors N' = 9783.
1. Le nombre N' peut-il s'écrire avec moins de quatre chiffres ?
2. Existe-t-il un nombre N tel que N' = 5N ?
3. Déterminer un entier naturel N tel que N' = 4N.

Correction :

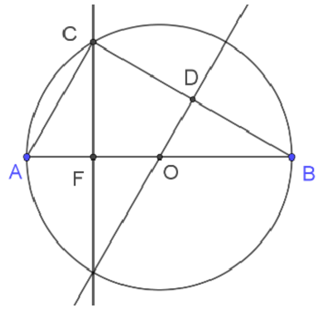
1. C'est possible, par exemple si le nombre N est 3450, alors le nombre N' est 0543 et celui-ci s'écrit qu'avec 3 chiffres car c'est 543.
Par conséquent si le chiffre des unités de N est 0 alors N' s'écrira qu'avec 3 chiffres.

2. N ne possède que 4 chiffres donc N' en a 4 maximum et par conséquent N' est au maximum 9 999.
Si N' = 5N alors N est 5 fois plus petit que N' et N est au maximum $9\,999\ \div 5 = 1\,999$,8 soit 1 999
Par conséquent le chiffre des milliers de N est 1 ce qui signifie que le chiffre des unités de N' est 1.
Cela n'est pas possible car si N' = 5N alors N' est un multiple de 5 et son chiffre des unités est 5 ou 0.

3. N' = 4N n'est envisageable que si N<2 500, ce qui exige que le chiffre des milliers de N soit 1 ou 2.
Mais N' étant un multiple de 4, son chiffre des unités ne peut pas être 1. Ce multiple de 4 a donc comme chiffre des unités 2.
Comme N≥2 000, N'est nécessairement supérieur à 8 000 donc le chiffre des unités de N ne peut être que 8 ou 9.
On essaye donc plusieurs possibilités en utilisant sa calculatrice et on trouve que le nombre cherché est 2 178.

En effet 4 x 2 178 = 8 712 N = 2 178 et N' = 8 712

Exercice 3 : Quel est le rayon du cercle ?



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] et de centre O.
On considère un point C du cercle $\mathcal{C}$. On note F le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
La médiatrice du segment [BC] coupe ce segment au point D.

On suppose que OF = OD = 7.
1. Déterminer deux triangles isométriques au triangle CFO.
2. Quel est le rayon du cercle $\mathcal{C}$?

Correction :
1) Par définition des points C et D, les triangles CFO et CDO sont rectangles respectivement en F et D. Ils ont un côté en commun, le segment [CO] et OD = OF. On en déduit que CFO et CDO sont égaux (donc isométriques)

Comme (OD) est la médiatrice de [CB], on a aussi COD et ODB qui sont égaux.

2) Comme CFO, CDO et ODB sont égaux, on a $\widehat{OBD} = \widehat{OCF} = \widehat{OCD}$.
La somme des angles d'un triangle est 180° donc dans le triangle BFC on a $\widehat{CFB} + \widehat{FBC} + \widehat{BCF} = 180°$
Donc $\widehat{OBD} + \widehat{OCF} + \widehat{OCD} = 90°$ et $\widehat{OBD} = \widehat{OCF} = \widehat{OCD} = 30°$
Le triangle OFC est rectangle et $\widehat{FOC} = 180° - 90° - 30° = 60°$
AOC est un triangle isocèle car AO = OC donc $\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ et $\widehat{CAO} = (180° - 60°) \div 2 = 60°$
Le triangle ACO est donc équilatéral.
La droite (CF) qui est une hauteur de ACO est donc la médiatrice de [AO].
Par conséquent, les triangles AFC et CFO sont égaux et AF = FO
AO = AF + FO = 7 cm + 7 cm = 14 cm.
Le rayon du cercle est donc 14 cm.

Exercice 4 : Carrément carré

On souhaite recouvrir un sol carré avec des dalles de forme carrée exclusivement. Ces carrés peuvent avoir des dimensions différentes. Les dalles ne se chevauchent pas et sont parfaitement juxtaposées (les traits n'ont pas d'épaisseur).

On donne ci-contre (figure 1) un exemple d'un tel dallage constitué de 12 carrés.

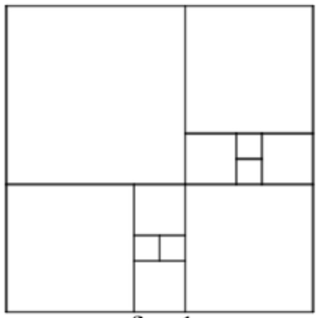


fig. 1

1. a. En partant de la figure 1, proposer un dallage constitué de 24 carrés, sans agrandir la surface.

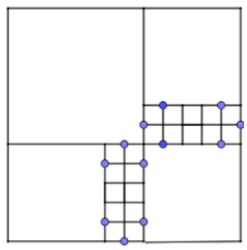
b. Construire un dallage constitué de 6 carrés, puis de 7 carrés.

c. Montrer qu'un dallage constitué de 2 carrés est impossible puis montrer qu'il en va de même pour un dallage constitué de 3 carrés.

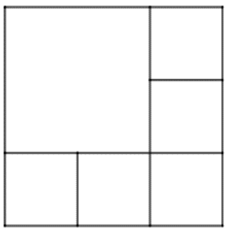
d. Montrer que pour tout entier naturel n, on peut réaliser un dallage constitué de $1+3n$ carrés.

Correction question 1

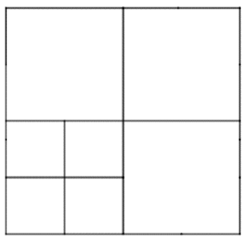
a) La figure ci-contre montre 24 carrés (quand on coupe un carré en 4, on ajoute 3 carrés).



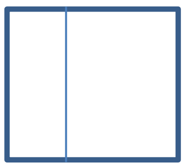
b) Avec 6 carrés :

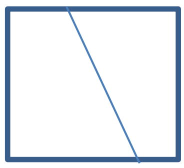


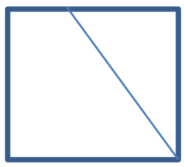
Avec 7 carrés :



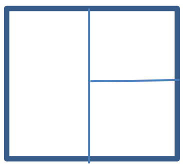
c) Quand on coupe un carré en 2, on obtient deux rectangles, ou des polygones qui ne sont pas des quadrilatères. Il n'est donc pas possible d'avoir 2 carrés.







Pour avoir 3 figures, il faut encore partager une des figures obtenues en deux, on voit que cela n'est pas possible, au mieux deux carrés apparaissent mais il y a toujours un rectangle.



d) Quand on coupe un carré en 4, cela revient à ajouter 3 carrés (il y en avait 1, il y en a 4 après).
Si je coupe n fois un carré j'aurais donc ajouter $3n$ carrés et il y aura $1 + 3n$ carrés.

Question 2 :

Le dallage de la figure 2 est constitué d'un carré central et de carrés tous identiques sur les côtés.

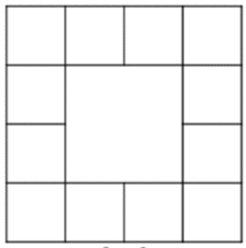


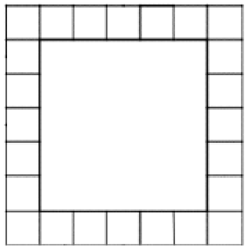
fig. 2

a. Proposer un dallage du même type constitué de 25 carrés.

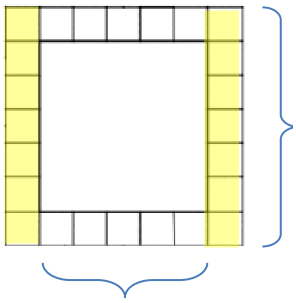
b. S'il y a n carrés sur chaque côté, combien y a-t-il de dalles carrées au total ?

Correction question 2

a. Dans le cas de la figure 2, le dallage est constitué de 4 petits carrés sur le côté, ce qui donne 12 petits carrés et 1 grand, soit au total 13 carrés.
Si on prend 5 petits carrés sur chaque côté, on aura au total 5+5+3+3+1=17 carrés.
Pour 6 petits carrés sur chaque côté, on aura au total 6+6+4+4+1=21 carrés.
Pour 7 petits carrés sur chaque côté, on aura au total 7+7+5+5+1=25 carrés d'où la figure ci-contre.



b. Plus généralement, s'il y a n carrés sur un côté, il y en a n carrés à l'opposé et $n-2$ sur les deux autres côtés.



En n'oubliant pas le carré central, il y a $2\times n+2\times(n-2)+1 = 2n+2\times n+2\times(-2)+1$

$$= 4n-3$$